

Physik - Bewegung entlang einer Geraden

1 Größen

- x : Die Funktion $x(t)$ gibt die Position eines Körpers zur Zeit t an, x_0 seine Position zur Zeit 0; Einheit: m
- v : Die Funktion $v(t)$ gibt die Geschwindigkeit (=Änderungsrate der Position) eines Körpers zur Zeit t an; diese Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Funktion $x(t)$ und ist deshalb die *Ableitung* von $x(t)$, $x'(t)$ genannt; v_0 ist die Geschwindigkeit zur Zeit 0; Einheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- a : Die Funktion $a(t)$ gibt die Beschleunigung (=Änderungsrate der Geschwindigkeit) eines Körpers zur Zeit t an; diese Beschleunigung entspricht der Steigung der Funktion $v(t)$ und ist deshalb die Ableitung von $v(t)$, also $v'(t)$; a_0 ist die Beschleunigung zur Zeit 0; Einheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

2 Nichtbeschleunigte Bewegung

Die einfachste Form der Bewegung ist die nichtbeschleunigte, bei der sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Geraden bewegt, wie ein Zug ohne Bahnhöfe. Hier gelten folgende Gleichungen:

- $x(t) = x_0 + v_0 t$, eine lineare Funktion
- $v(t) = x'(t) = v_0$, eine Konstante (die Geschwindigkeit bleibt ja immer gleich)
- $a(t) = v'(t) = x''(t) = 0$, weil sich die Geschwindigkeit nicht ändert, gibt es keine Beschleunigung

Beispiel: Ein Zug fährt konstant mit 100km/h. Als er an einem Bahnübergang vorbeifährt und der Bahnwärter seine Stoppuhr startet, ist er bereits 20km unterwegs. Wie weit ist er insgesamt unterwegs, wenn die Uhr des Bahnwärters 1h anzeigt? Was zeigt die Uhr, wenn der Zug 200km gefahren ist?

3 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Ein typisches Beispiel für gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist der freie Fall. Hier ändert sich die Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit gleich und zwar nach folgenden Gleichungen:

- $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$, eine quadratische Funktion
- $v(t) = x'(t) = v_0 + a_0 t$, eine lineare Funktion, weil die Geschwindigkeit sich ja gleichmäßig ändert
- $a(t) = v'(t) = x''(t) = a_0$, die Beschleunigung bleibt konstant

Beim freien Fall auf der Erde ist $a_0 = g$, die Erdbeschleunigung von etwa $9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Beispiele: 2-6, 2-17, 2-20

4 Allgemeine Bewegungsgleichungen, Ableitung, Integration

Will man aus einer andersartigen Positionsgleichung, wie z.B. $x(t) = 3\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^3 - 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 + 9\frac{\text{m}}{\text{s}}t$ die Gleichung für die Geschwindigkeit herausfinden, so muss man sie *ableiten* nach t . Jeder Teil der Gleichung wird mit der Anzahl der darin vorkommenden t multipliziert und durch t geteilt. Schrittweise funktioniert das so:

- $3\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^3 \Rightarrow 3\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^3 \cdot 3 : t = 9\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^2$
- $-10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 \Rightarrow -10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2 \cdot 2 : t = -20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t$
- $9\frac{\text{m}}{\text{s}}t \Rightarrow 9\frac{\text{m}}{\text{s}}t \cdot 1 : t = 9\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Die fertige Geschwindigkeitsgleichung lautet also $v(t) = x'(t) = 9\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^2 - 20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t + 9\frac{\text{m}}{\text{s}}$, sie gibt die Steigung der Positionsgleichung zu jeder Zeit t an.

Um hieraus die Beschleunigungsgleichung zu berechnen, muss wieder abgeleitet werden:

- $9\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^2 \Rightarrow 9\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t^2 \cdot 2 : t = 18\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t$
- $-20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t \Rightarrow -20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t \cdot 1 : t = -20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $9\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow 9\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0 : t = 0$

$$a(t) = v'(t) = x''(t) = 18\frac{\text{m}}{\text{s}^3}t - 20\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Umgekehrt ist es auch möglich, aus der Gleichung für Beschleunigung oder Geschwindigkeit die Gleichung für Geschwindigkeit oder Position zu berechnen. Die Position $x(t)$ ist die Fläche unter der Geschwindigkeitsfunktion bis zur Zeit t , die Geschwindigkeit v die Fläche unter der Funktion $a(t)$ bis zur Zeit t . Allerdings müssen hierzu Angaben über Anfangsgeschwindigkeit oder Anfangsposition bekannt sein.

Jeder Teil der Gleichung wird mit t multipliziert und durch die Anzahl der dann vorhandenen t geteilt. Außerdem wird eine Konstante hinzugefügt. Schrittweise funktioniert das so (für die Gleichung $v(t) = 3\frac{\text{m}}{\text{s}} + 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t$):

- $3\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow 3\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t : 1 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}t$
- $1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t \Rightarrow 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t \cdot t : 2 = \frac{1}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2$
- Konstante: $x_0 = 10\text{m}$, Position zur Zeit 0, die von Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängig ist

Zusammengefasst also $x(t) = 10\text{m} + 3\frac{\text{m}}{\text{s}}t + \frac{1}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}t^2$.

Beispiele: 2-9