Längenkontraktion

1 Messen der Länge eines Stabes in Ruhe

Die Länge des Stabes lässt sich bestimmen, indem man am einen Ende eine Lichtquelle und einen Lichtsensor, am anderen Ende einen Spiegel anbringt. Die Zeit vom Aussenden des Lichtstrahls bis zur Reflektion an der anderen Seite des Stabes ist bei synchronisierten Uhren gleich der Zeit von der Reflektion des Lichtstrahls bis zum Auftreffen auf den Sensor. Da sich der Lichtstrahl mit Lichtgeschwindigkeit (c) fortbewegt, lässt sich die Zeitdauer Δt_0 von Aussendung bis Wiederauftreffen des Lichtstrahls aus der Länge l_0 des Stabes wie folgt berechnen:

$$c \cdot \Delta t_0 = 2l_0$$

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c} \tag{1}$$

2 Messen der Länge eines bewegten Stabes

Misst man mit o.g. Methode die Länge eines relativ zum Beobachter in Stabrichtung bewegten Stabes, so kommt man nicht zum selben Ergebnis.

Wird der Lichtstrahl „in Fahrtrichtung“ des Stabes ausgesandt, so benötigt er für die Strecke zum Spiegel länger als $\frac{l_0}{c}$, da sich der Spiegel währenddessen in der gleichen Richtung wie der Lichtstrahl bewegt. Im (unmöglichen) Extremfall, wenn sich der Stab mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, kommt der Lichtstrahl nie am Spiegel an. Die für diese Strecke benötigte Zeit Δt_1 bei relativer Geschwindigkeit u des Stabes zum Beobachter und tatsächlicher (in Ruhe zum Stab gemessener) Stablänge l_0 beträgt also:

$$\Delta t_1 = \frac{l_0}{c-u} \tag{2}$$

und für den Rückweg:

$$\Delta t_2 = \frac{l_0}{c+u} \tag{3}$$

was für die Gesamtdauer von Aussendung bis Wiederauftreffen des Lichtstrahls bedeutet:

$$\Delta t = \frac{l_0}{c+u} + \frac{l_0}{c-u} = \frac{2l_0 c}{c^2-u^2} = \frac{2l_0}{c(1-\frac{u^2}{c^2})} \tag{4}$$

Für einen mit dem Stab bewegten Beobachter gilt (1), woraus sich für unseren Beobachter mit Hilfe der Zeitdilatationsformel ergibt:

$$\Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2l_0}{c} \tag{5}$$

Fasst man die beiden Formeln zusammen, ergibt sich:

$$\frac{2l}{c(1-\frac{u^2}{c^2})} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{2l_0}{c}$$

$$\frac{2l}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2l_0}{c}$$

$$\frac{l}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = l_0$$

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{6}$$

(6) ist die endgültige Formel für die Längenkontraktion.

- l: Länge für den relativ zum gemessenen Objekt bewegten Beobachter
- l_0: Länge für den relativ zum gemessenen Objekt ruhenden Beobachter
- u: Geschwindigkeit des bewegten Objektes relativ zum Beobachter
- c: Lichtgeschwindigkeit

Diese Formel kommt immer dann zur Anwendung, wenn Längen parallel zur Bewegungsrichtung gemessen werden sollen. Längen, die senkrecht zur Bewegungsrichtung stehen, werden nicht kontrahiert (sonst Asymmetrie).